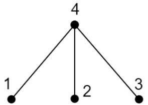
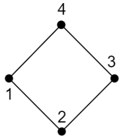


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

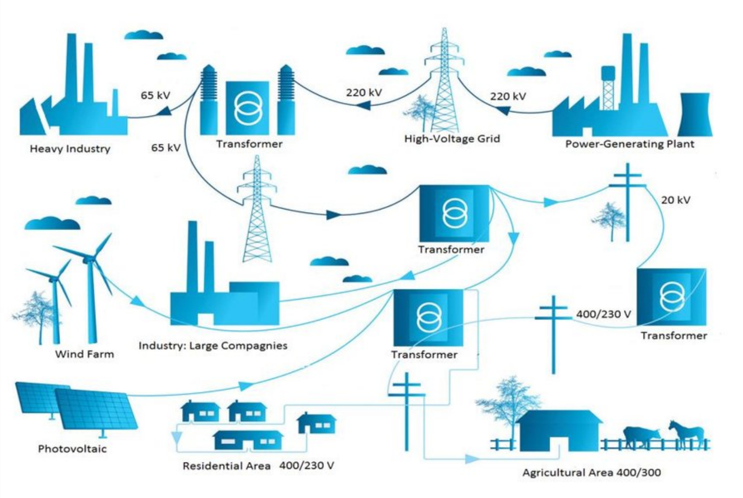


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

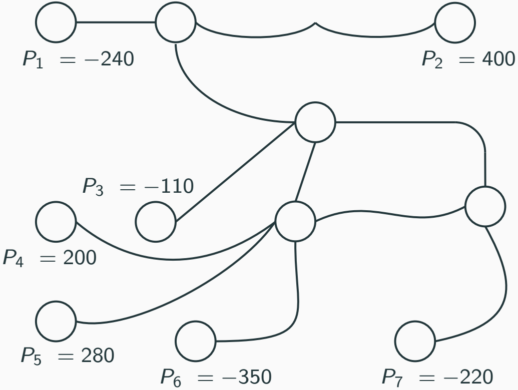
Flux de puissance dans les réseaux électriques : attaquer la non-linéarité par la théorie des graphes

Jim Delitroz

Réseau électrique

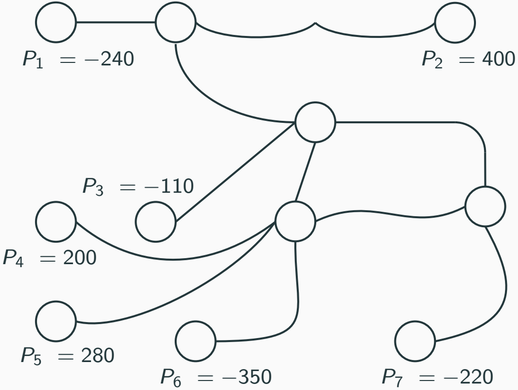


Réseau électrique



Un graphe!

Réseau électrique



Un système dynamique!

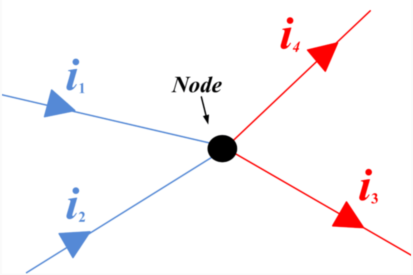
- Paramètres de ligne : impédances
- Paramètres de noeud : puissances
- Variables dynamiques : tensions/flux

Les équations

Equilibre des puissances

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + G_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right)$$

$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right)$$

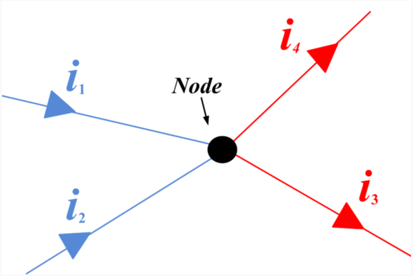


Les équations

Equilibre des puissances

$$p_i = \sum_{j \sim i} \overbrace{B_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j)}^{flux} + \overbrace{G_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)}^{perte}$$

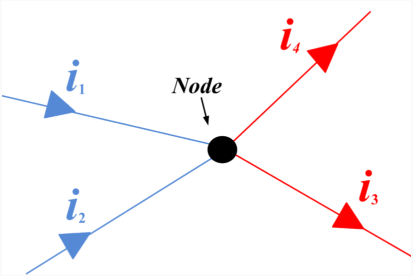
$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$



Les équations

Equilibre des puissances

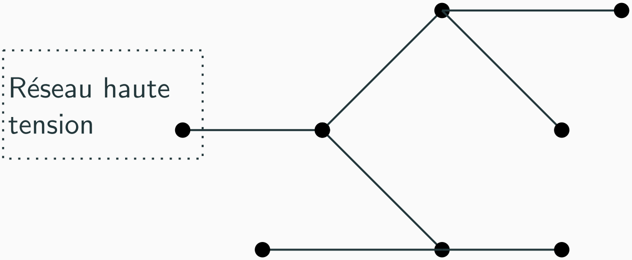
$$p_i = \sum_{j \sim i} \overbrace{B_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j)}^{\textit{flux}} + \overbrace{G_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)}^{\textit{perte}}$$
$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$



- Paramètres fixes: B, G
- Paramètres changeants: p, q
- Variables: v, θ

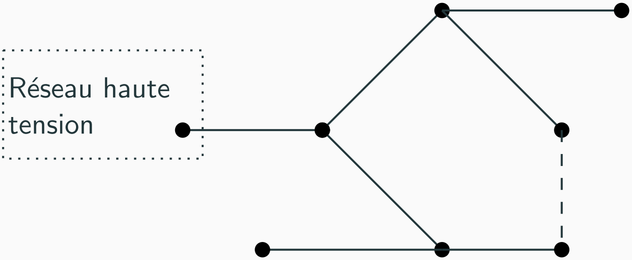
Réseau acyclique

- Topologie en arbre
- Noeud zéro
- Réseau de distribution



Réseau acyclique

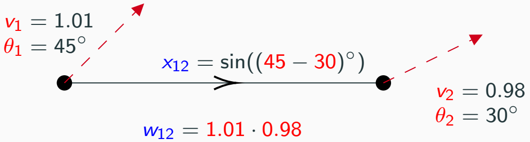
- Topologie en arbre
- Noeud zéro
- Réseau de distribution



Reformulation en variables d'arêtes

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} \overbrace{v_i v_j}^{w_{ij}} \overbrace{\sin(\theta_i - \theta_j)}^{x_{ij}} + \overbrace{G_{ij}}^{k_{ij} B_{ij}} \left(v_i^2 - v_i v_j \overbrace{\cos(\theta_i - \theta_j)}\right)$$

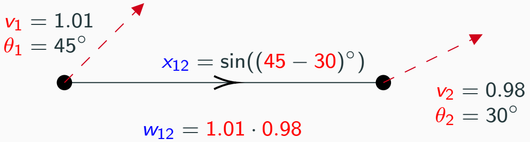
$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$



Reformulation en variables d'arêtes

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} \overbrace{v_i v_j}^{w_{ij}} \overbrace{\sin(\theta_i - \theta_j)}^{x_{ij}} + \overbrace{G_{ij}}^{k_{ij} B_{ij}} (v_i^2 - v_i v_j \overbrace{\cos(\theta_i - \theta_j)}^{\sqrt{1 - x_{ij}^2}})$$

$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$



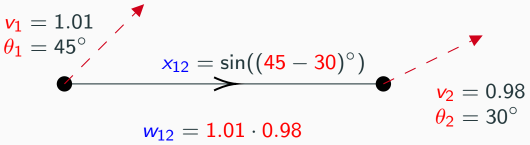
Reformulation en variables d'arêtes

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} \overbrace{v_i v_j}^{w_{ij}} \overbrace{\sin(\theta_i - \theta_j)}^{x_{ij}} + \overbrace{G_{ij}}^{k_{ij}B_{ij}} (v_i^2 - v_i v_j \overbrace{\cos(\theta_i - \theta_j)}^{\sqrt{1-x_{ij}^2}})$$

$$q_i = \sum_{j\sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j)\right)$$

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}\left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right)\right)$$

$$q_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right).$$



Matrice d'incidence et orientation

But: associer grandeurs d'arêtes et de noeuds

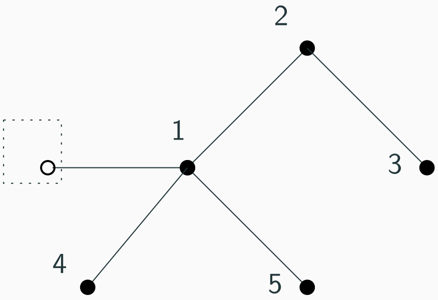
$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij} (\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}) \right)$$
$$q_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2} \right).$$

Matrice d'incidence et orientation

But: associer grandeurs d'arêtes et de noeuds

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}\left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right) \right)$$

$$q_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2} \right).$$



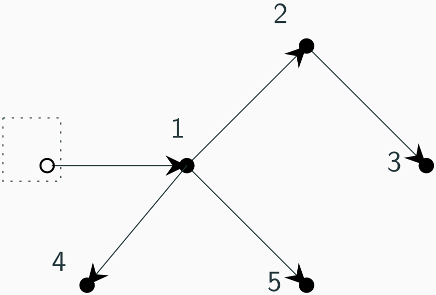
$$E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence et orientation

But: associer grandeurs d'arêtes et de noeuds

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij} \left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2} \right) \right)$$

$$q_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2} \right).$$



$$E = \begin{pmatrix} -B_{01} & B_{12} & 0 & B_{14} \\ 0 & -B_{12} & B_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -B_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Formulation matricielle I : impossibilité car asymétrie

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}) \right)$$

$$q_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2} \right).$$

Calculons

$$E\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -B_{01} & B_{12} & 0 & B_{14} & B_{15} \\ 0 & -B_{12} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{12} \\ x_{23} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{pmatrix}$$

Formulation matricielle I : impossibilité car asymétrie

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}\left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right)\right)$$

$$q_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(-k_{ij} x_{ij} + \frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right).$$

Calculons

$$E\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -B_{01} & B_{12} & 0 & B_{14} & B_{15} \\ 0 & -B_{12} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{12} \\ x_{23} \\ x_{14} \\ x_{15} \end{pmatrix}$$

✓ Somme le bon nombre de contributions

✓ Respecte l'opposition des signes, $x_{ij} = -x_{ji}$.

Asymétrie des flux et E+ E-

On introduit E_+ et E_-:

$$\begin{aligned} (E_+)_{il} &= \max(E_{il}, 0) \\ (E_-)_{il} &= |\min(E_{il}, 0)| \\ &\Rightarrow E = E_+ - E_- \end{aligned}$$

Asymétrie des flux et E+ E-

On introduit E_+ et E_-:

$$\begin{aligned}(E_+)_{il} &= \max(E_{il}, 0)\\ (E_-)_{il} &= |\min(E_{il}, 0)|\\ &\Rightarrow E = E_+ - E_-\end{aligned}$$

Et les flux avec perte:

$$\begin{aligned}\xi_e &= x_{ij} - k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2}\\ \zeta_e &= x_{ij} + k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2} = -\xi_{ji}, \qquad \text{pour } e = ij.\end{aligned}$$

Asymétrie des flux et E+ E-

On introduit E_+ et E_-:

$$\begin{aligned}(E_+)_{il} &= \max(E_{il}, 0)\\ (E_-)_{il} &= |\min(E_{il}, 0)|\\ &\Rightarrow E = E_+ - E_-\end{aligned}$$

Et les flux avec perte:

$$\begin{aligned}\xi_e &= x_{ij} - k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2}\\ \zeta_e &= x_{ij} + k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2} = -\xi_{ji}, \qquad\qquad \text{pour } e = ij.\end{aligned}$$

On garde en tête Pythagore:

$$x_e^2 = \underbrace{\left(\frac{\xi_e + \zeta_e}{2}\right)^2}_{\sin^2} = 1 - \underbrace{\left(\frac{\xi_e - \zeta_e}{2k_e}\right)^2}_{\cos^2}$$

Formulation matricielle le retour

$$\xi_e = x_{ij} - k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2}$$
$$\zeta_e = x_{ij} + k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2} = -\xi_{ji}, \qquad \text{pour } e = ij.$$

On veut matricier

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}\left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right)\right), 1 \leq i \leq n$$

Formulation matricielle le retour

$$\xi_e = x_{ij} - k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2}$$
$$\zeta_e = x_{ij} + k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2} = -\xi_{ji}, \qquad \text{pour } e = ij.$$

On veut matricier

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij} \left(x_{ij} + k_{ij}\left(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - {x_{ij}}^2}\right)\right), 1 \leq i \leq n$$

$$\boldsymbol{p} = E_+[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\xi} - E_-[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{G}\boldsymbol{v}$$

Formulation matricielle le retour

$$\xi_e = x_{ij} - k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2}$$
$$\zeta_e = x_{ij} + k_{ij}\sqrt{1 - x_{ij}^2} = -\xi_{ji}, \qquad \text{pour } e = ij.$$

On veut matricier

$$p_i = \sum_{j\sim i} B_{ij} w_{ij}\left(x_{ij} + k_{ij}(\frac{v_i}{v_j} - \sqrt{1 - x_{ij}{}^2})\right), 1 \leq i \leq n$$

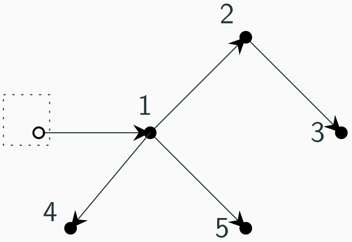
$$\boldsymbol{p} = E_+[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\xi} - E_-[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{G}\boldsymbol{v}$$

Super, on a réussi! Pourquoi on faisait ça ?

Isoler ζ

$$\boldsymbol{p} = E_+[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\xi} - E_-[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{G}\boldsymbol{v}$$

Rappel de notre matrice d'incidence:



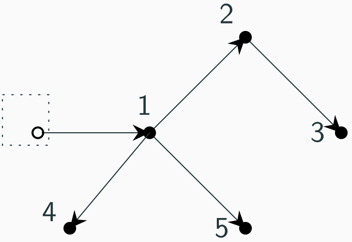
$$\begin{pmatrix} -B_{01} & B_{12} & 0 & B_{14} & B_{15} \\ 0 & -B_{12} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_{15} \end{pmatrix}$$

Observer E_-, et isoler ζ.

Isoler ζ

$$\boldsymbol{p} = E_+[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\xi} - E_-[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{G}\boldsymbol{v}$$

Rappel de notre matrice d'incidence:



$$\begin{pmatrix} -B_{01} & B_{12} & 0 & B_{14} & B_{15} \\ 0 & -B_{12} & B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -B_{15} \end{pmatrix}$$

Observer E_-, et isoler ζ.

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{w}]^{-1} E_-^{-1} \left(E_+[\boldsymbol{w}]\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{p} + \mathcal{G}\boldsymbol{v}\right)$$

La même chose avec ξ

On peut isoler ξ dans l'équation de la puissance réactive q.

La même chose avec ξ

On peut isoler ξ dans l'équation de la puissance réactive q.

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{w}]^{-1} E_-^{-1} \left(E_+ [\boldsymbol{w}] \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{p} + \mathcal{G} \boldsymbol{v} \right)$$
$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{w}]^{-1} A^{-1} \left(\boldsymbol{q} - C \boldsymbol{p} - D \boldsymbol{v} \right)$$

où A, C, D sont des matrices qui dépendent du réseau.

La même chose avec ξ

On peut isoler ξ dans l'équation de la puissance réactive q.

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{w}]^{-1} E_-^{-1} \left(E_+ [\boldsymbol{w}] \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{p} + \mathcal{G} \boldsymbol{v} \right)$$
$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{w}]^{-1} A^{-1} \left(\boldsymbol{q} - C \boldsymbol{p} - D \boldsymbol{v} \right)$$

où A, C, D sont des matrices qui dépendent du réseau.

$$x_e^2 = \left(\frac{\xi_e + \zeta_e}{2} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\xi_e - \zeta_e}{2k_e} \right)^2$$

Une équation par arête e

Inconnues: amplitudes des tensions v, dans w et v

n équations quadratiques

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{w}]^{-1} E_-^{-1} \left(E_+ [\boldsymbol{w}] \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{p} + \mathcal{G} \boldsymbol{v} \right)$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{w}]^{-1} A^{-1} \left(\boldsymbol{q} - C \boldsymbol{p} - D \boldsymbol{v} \right)$$

$$\text{Et } \forall e,\ 1 = \left(\frac{\xi_e + \zeta_e}{2} \right)^2 + \left(\frac{\xi_e - \zeta_e}{2 k_e} \right)^2$$

On retourne aux valeurs nodales: $w_{ij} \to v_i v_j$

n équations quadratiques

$$\boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{w}]^{-1} E_-^{-1} \left(E_+ [\boldsymbol{w}] \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{p} + \mathcal{G} \boldsymbol{v} \right)$$

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{w}]^{-1} A^{-1} \left(\boldsymbol{q} - C \boldsymbol{p} - D \boldsymbol{v} \right)$$

$$\text{Et } \forall e,\ 1 = \left(\frac{\xi_e + \zeta_e}{2} \right)^2 + \left(\frac{\xi_e - \zeta_e}{2k_e} \right)^2$$

On retourne aux valeurs nodales: $w_{ij} \to v_i v_j$

$$4 v_t v_u = L_0(e) + \sum_{i \in \varrho_e} L_{1,i}(e) v_i + \sum_{i,j \in \varrho_e} L_{2,ij}(e) v_i v_j$$

Petite pause on respire

Petite pause on respire

On avait $2n$ équations trigonométriques & quadratiques:

$$p_i = \sum_{j \sim i} B_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + G_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right)$$
$$q_i = \sum_{j \sim i} -G_{ij} v_i v_j \sin(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \left(v_i^2 - v_i v_j \cos(\theta_i - \theta_j) \right)$$

On a maintenant n équations quadratiques.

$$4 v_t v_u = L_0(e) + \sum_{i \in \varrho_e} L_{1,i}(e) v_i + \sum_{i,j \in \varrho_e} L_{2,ij}(e) v_i v_j$$

Super!

Décortiquer L

$$4v_t v_u = L_0(e) + \sum_{i \in \varrho_e} L_{1,i}(e) v_i + \sum_{i,j \in \varrho_e} L_{2,ij}(e) v_i v_j$$

Différentes échelles de temps: écrire $L_{0,1,2} = L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) =: L(\boldsymbol{s})$.

Décortiquer L

$$4v_t v_u = L_0(e) + \sum_{i\in\varrho_e} L_{1,i}(e)v_i + \sum_{i,j\in\varrho_e} L_{2,ij}(e)v_i v_j$$

Différentes échelles de temps: écrire $L_{0,1,2} = L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) =: L(\boldsymbol{s})$.

$$4v_t v_u = \boldsymbol{s}^T M_0(e)\boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T M_1(e)\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}^T M_2(e)\boldsymbol{v}$$

Forme quadratique

Autrement dit:

$$\mathcal{M}(e) := \left(\begin{array}{c|c} M_0 & \frac{1}{2}M_1 \\ \hline \frac{1}{2}M_1^T & \tilde{M}_2 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3n\times 3n}$$

$$0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

Forme quadratique

Autrement dit:

$$\mathcal{M}(e) := \left(\begin{array}{c|c} M_0 & \frac{1}{2} M_1 \\ \hline \frac{1}{2} M_1^T & \tilde{M}_2 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$$

$$0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

- Chaque arête e définit une forme quadratique dans $\mathbb{R}^{3n}$.
- Le vecteur de tensions $\boldsymbol{v}$ réalise les équations de flux ssi le vecteur puissances-tensions est dans l'intersection des noyaux de ces formes quadratiques.

Convexité en $\boldsymbol{v}$ et moindres carrés

$$0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_0 & \frac{1}{2} M_1 \\ \hline \frac{1}{2} M_1^T & \tilde{M}_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} =: f_e(\boldsymbol{v})$$

Convexité en $\boldsymbol{v}$ et moindres carrés

$$0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_0 & \frac{1}{2} M_1 \\ \hline \frac{1}{2} M_1^T & \tilde{M}_2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} =: f_e(\boldsymbol{v})$$

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{v}^2} f_e(\boldsymbol{v}) = 2\tilde{M}_2 \succeq 0.$$

1. Ca se prouve, promis.
2. Ca veut dire que f_e est convexe (pour tout e).

Convexité en $\boldsymbol{v}$ et moindres carrés

$$0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} M_0 & \frac{1}{2}M_1 \\ \hline \frac{1}{2}M_1^T & \tilde{M}_2 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} =: f_e(\boldsymbol{v})$$

$$\frac{d^2}{d\boldsymbol{v}^2} f_e(\boldsymbol{v}) = 2\tilde{M}_2 \succeq 0.$$

1. Ca se prouve, promis.
2. Ca veut dire que f_e est convexe (pour tout e).
3. On définit

$$F(\boldsymbol{v}) := \sum_{e=1}^{n} f_e(\boldsymbol{v})^2$$

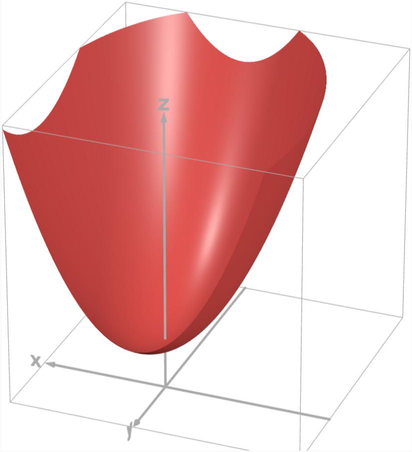
   Convexe de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$F(\boldsymbol{v}^*) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{v}^* \text{ solution.}$$

Minimum global

$$F(\boldsymbol{v}) = \sum_e \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \right)^2 = 0?$$

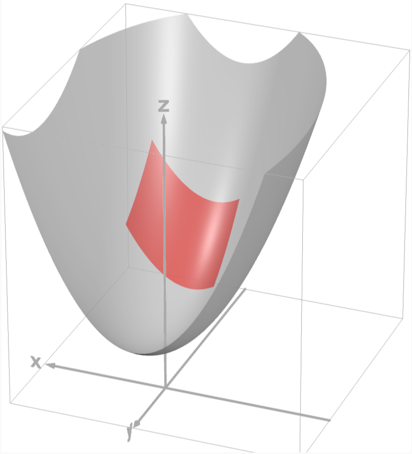
Une fonction convexe admet un unique minimum local, qui coïncide avec son minimum global.
Et en plus il est "facile à trouver" $\rightarrow$ descente de gradient.



Minimum global

$$F(\boldsymbol{v}) = \sum_e \left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{s}^T & \boldsymbol{v}^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \right)^2 \quad = 0?$$

Une fonction convexe admet un unique minimum local, qui coïncide avec son minimum global.
Et en plus il est "facile à trouver" $\rightarrow$ descente de gradient.



Perturbation

Point d'équilibre: $\boldsymbol{s}_o$, $\boldsymbol{v}_o$ (hot/cold start).

$$\forall e : 0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o^T & \boldsymbol{v}_o^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o \\ \boldsymbol{v}_o \end{pmatrix}.$$

Perturbation

Point d'équilibre: $\boldsymbol{s}_o$, $\boldsymbol{v}_o$ (hot/cold start).

$$\forall e : 0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o^T & \boldsymbol{v}_o^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o \\ \boldsymbol{v}_o \end{pmatrix}.$$

Perturbation $\boldsymbol{\delta_s}$ et réponse $\boldsymbol{\delta}_v$

$$0 = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{s}_o + \boldsymbol{\delta_s})^T & (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\delta_v})^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o + \boldsymbol{\delta_s} \\ \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\delta_v} \end{pmatrix}$$

Perturbation

Point d'équilibre: $\boldsymbol{s}_o$, $\boldsymbol{v}_o$ (hot/cold start).

$$\forall e : 0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o^T & \boldsymbol{v}_o^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o \\ \boldsymbol{v}_o \end{pmatrix}.$$

Perturbation $\boldsymbol{\delta_s}$ et réponse $\boldsymbol{\delta}_v$

$$0 = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{s}_o + \boldsymbol{\delta_s})^T & (\boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\delta_v})^T \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{s}_o + \boldsymbol{\delta_s} \\ \boldsymbol{v}_o + \boldsymbol{\delta_v} \end{pmatrix}$$

Distributivité etc...

$$\underbrace{\left(\boldsymbol{s}_o^T M_1 + 2\boldsymbol{v}_o^T M_2\right)}_{\tau_e \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\delta_v} = \underbrace{-\left(2\boldsymbol{s}_o^T M_0 + \boldsymbol{v}_o^T M_1\right)}_{\sigma_e \in \mathbb{R}^{2n}} \boldsymbol{\delta_s} + O(\delta^2).$$

Perturbation & Linéarisation

$$\forall e: \underbrace{\left(\boldsymbol{s}_o^T M_1 + 2\boldsymbol{v}_o^T M_2\right)}_{\tau_e \in \mathbb{R}^n} \boldsymbol{\delta_v} = \underbrace{-\left(2\boldsymbol{s}_o^T M_0 + \boldsymbol{v}_o^T M_1\right)}_{\sigma_e \in \mathbb{R}^{2n}} \boldsymbol{\delta_s} + O(\delta^2).$$

En combinant toutes les équations ($1 \leq e \leq n$):

$$\begin{aligned} \overbrace{T}^{\in \mathbb{R}^{(n \times n)}} \boldsymbol{\delta}_v &= \overbrace{\Sigma}^{\in \mathbb{R}^{n \times 2n}} \boldsymbol{\delta}_s + \boldsymbol{O}(\delta^2) \\ \tilde{\boldsymbol{\delta}}_v &= T^{-1} \Sigma \boldsymbol{\delta}_s \end{aligned}$$

Merci!